中等数学のカリキュラムへの視点（１）

A View Point of Curriculum of Mathematics (1)

佐藤英雄（和歌山大学教育学部）
Hideo SATO

2007年10月5日受理

概 要

現在の中学校は第二次大戦後に義務教育化されたが、それ以前は、高等小学校と旧制中等学校が並立していて、そこでの数学のカリキュラムを単純に対比して言えば、高等小学校では実用的色彩が濃く、旧制中等学校では学問的色彩が濃かった。新制中学校の数学のカリキュラムは基本的には旧制中学校のそれを受け継いだ。

大戦後の小学・中学の新義務教育体制のもとでは、さらに、小学校算数科と中学校数学科のカリキュラムを、それ自体としてどのように位置づけるかということとともに、それらの連接関係をどのように捉えるべきかが問題となる。現在に至るまで、カリキュラムの改編は続いている。特に注意すべきは、ある内容が小学校算数に移されたり、中学校数学に移されたりしている。これは算数は数学の前段階、あるいは、数学は算数の発展段階とする考えに基いている。換言すれば、算数と数学は難易度は異なるものの、同質のものであると看做されている。

著者は算数と数学は連接関係はあるが、必ずしも同質ではなく、そこにおける思考の型が異なると考える。ここで思考の型と言って、思考の質という言葉を避けたのは、そう言うと数学が算数の上位にあると解されかねないからである。それゆえ、中学校数学の指導に当たっては、思考の型の変換を教師の側が十分に意識しなければならないと考える。本稿では、このような視点で、本稿は中学校数学の「数と式」と「図形」領域について論ずる。

なお、本稿は和歌山大学教育学部での講義「数学科教育法Ａ」の概要である。

【キーワード】中学校数学の骨格、理念世界、現実世界

1．中学校数学の骨格と数学の特質

小学校算数の内容は「小学校学習指導要領解説：算数編」（以下「算数指導要領解説」という）では、「数と計算」「量と測定」「図形」「数量関係」の４つの領域に分けて解説されている。それを受けて「中学校学習指導要領解説～数学編～」（以下、「中学指導要領解説」という）では、算数指導要領解説と同様に、「数と式」「図形」「数量関係」の３領域を設定しているが、その後で、下記の中学数学の骨格を掲げている（２６頁)。

(1) 数概念の拡張（正の数と負の数，無理数）
(2) ユークリッド空間
(3) 関数概念
(4) 文字式
(5) 演繹法（証明の概念）（証明はなぜ必要か）

中学指導要領解説はこの骨格を提示した後に、それを領域に当てはめて内容を学年次ごとに解説している。それが中学数学の系統性である。ちなみに、算数指導要領解説には中学数学の骨格に相当するものの記述はない。中学数学では数学の内容を前面に出してきている。

高校数学の指導要領解説では、領域設定がなく、多様な科目のいずれにどのような内容を盛り込んでいるかを詳細に述べている。その１６頁には「数学的活動」が図解されているが、叙述の都合上、図中の「身近な事象」を「理念世界」に、「数学的考察・処理」を「理念世界」に言い換える。「算数的活動」は現実世界について意味論的に理解することであり、「数学的活動」は、現実世界と理念的世界の対応とともに、理念的世界の構造的理解が前面に出てくる。このように、小学校算数から高校数学にかけて、現実世界か

ら理念的世界へ重心が移動する。中学校数学は重心移動の過程として位置付けられる。中学校第一学年の最初に「正の数と負の数」、「文字式」が出てくるが、ここにおいて本質的には、事実との対応によりその正偽が検証された算数から、事実から離れたところで正偽を検証すべき数学へ転換することになる。

2．本稿の範囲

本稿で述べるのは、領域で言えば、「数と式」を中心とし、「図形」はそれに関連するものを題材とする。それゆえ、「図形」は主に中学の範囲で出てくる主要定理に限って述べる。「数量関係」については多項式関数についてのみ言及し、極限概念に関わっての微分積分、および、統計・確率については一切言及しない。

「数と式」領域に含まれる内容を前節で述べた骨格で言えば、数概念の拡張と文字式である。小学校算数の「数と計算」領域と同様に、「数と式」領域は数学のツールであると位置付けられる。ツールにはそれ自体として面白さを実感しにくい憾みがある。ツール指導にあたっては、「面白さ」を伝えることよりは、その「効用」を伝えることに重点が置かれるべきである。８節と９節ではそれを意識して取り上げた。

3．「数と式」の導入

前節で述べたように本稿では、領域で言えば「数と式」、骨格で言えば「数概念の拡張」、「文字式」を中心的話題とする。このうち中学校第一学年次で具体的に現れるのは、「正の数と負の数」「文字式」「方程式」であり、これらは理念的世界のワンセットの構造として理解されるべきものである。教師として心得ておくべきことは、これら３つのワンセットの内容は、この順に学習させなければならないことである。学習順とは“系統性”に他ならない。それを認識させるための題材としては、ツルカメ算に相当する文章題が適当である。算数的解法（ツルカメ算的解法）と連立一次方程式による解法との対比を通して、この題材は、同時に、中学数学と算数の性格の違いを訴えるのにも有用である。

その目的のために、連立方程式による解法の作業手順を記すと、

(1) 文意を捉えて連立一次方程式 $ax+by=c$; $dx+ey=f$ を立てる。ここで、a、b、c、d、e、f は定数、x、y は未知数である。
(2) 意味を離れて、この方程式を解く。
(3) この解が文意に即しているか検証する。

大学生の場合、初めて習ったときのことで記憶しているのは、未知数の使用が解法を著しく簡易化することである。しかし、方程式を解く際に移項の仕方によっては、未知数の係数や定数が負になり得ることは、気が付いていなかったか、そのときに戸惑ったことは忘れている。算数の範囲であれば、解く過程で、負の数が現れることは避けなければならない。算数では現実世界の中で処理することを強いられるために、「意味の解釈」と「計算」を同時に実行せねばならない。連立方程式による解法の本質は「意味の解釈」と「計算」を分離させること、すなわち、現実世界と理念世界に分離することである。負の数の出現如何に関わらず、このような方法が合理化されるためには、負の数も含めた数体系を確立しておくこと、手順に拠らずに（一次方程式の）解が一意性であることが前提である。すなわち、現実世界と分離しても成立し得る理念世界が前提である。

このような認識を中学生に求めることはできない。しかし、心のうちにある種の“わだかまり”をもつ生徒はいる可能性はある。そして、彼らはそれを言葉で明快に表現することもできない。通常、生徒は中学・高校の数学を経験する過程で、そのわだかまりを解消する。教師はそれを心得ておくべきである。

4．数概念の拡張

4.1　有理数までの拡張

自然数を前提として、整数、有理数が構成される。数学的操作としては、直積集合および同値関係による商集合を基盤とする。「自然数⇒整数」の拡張操作は「正の実数⇒全実数」の拡張操作にも適用可能である。このようにして構成された有理数の体系（有理数体）あるいは実数の体系（実数体）が「四則演算法則をすべてみたす」ことを確認させる。実は、こうなるように拡張したのであり、そうすることが数概念拡張の目的であることを強く訴える。

ただし、上記のような方法はきわめて数学的であり、中学生になりたての生徒には理解できるはずがない。これは教師の心得である。現実には、教育現場では方便として意味論的な算数的導入法をとらざるを得ない。余談ではあるが、あるタレントが数学啓蒙雑誌に中学数学の思い出として「借金をマイナス何回

か繰り返すと利益になるということが、私にはどうしても理解できなかった」と書いていた。教師としては意味論的な負の数の解釈の限界を知り、後々まで意味論的解釈に拘泥しないように配慮する必要がある。

4.2　実数までの拡張

無理数とは実数のうちで有理数でないものである。逆に、実数とは有理数と無理数の総称である。このように、無理数と実数は相補的な概念であり、そのいずれかが相補的な概念なしに定義されなければ意味を持たない。ところが、高校数学でもこのことは曖昧のままにされている。すなわち、循環論法になっている。数学的には19世紀後半期になって実数論が展開され、この循環論法のクビキから脱することができた。しかし、それは純粋に数学的な議論である。一般の中学生や高校生に理解させる必要もない。ただし、中学生や高校生でも、「なにゆえ実数ないし無理数を数として認めなければならなかったか？」という疑問を抱き得ることを数学教師は認識しておく必要がある。

自然数から（正の）有理数までの数概念の拡張は、そこに至るまで長い時間がかかったにせよ、どの文化圏でもほぼ同様な経過をたどっただろう。それは四則演算の自由性を得る必然の道程だった。数の本質的属性は四則演算等の計算であるとする観念がこうして生まれた。数直線の概念が顕在的な形で現れるのは中学数学であるが、実は潜在的な形では小学校算数でも現れている。そうして数直線上の点と数（実数）とが同一視されるように仕向けられ、無限小数が数であると思い込まされるようになる。当然ながら無限小数で表わされたもの同士の和は有限回の手続きでは完結しない。無限小数は四則演算という数の本質的属性をもたないように見えるために、児童・生徒にとっては「無限小数は数ではない」との疑念が拭い去れない。

ところで数の本質的属性を逆転させて「(四則）演算できるものは数である」という観念が生まれるのも自然である。古代ギリシャ人たちの場合もそうだった。加えるに、ギリシャ人たちの記数法は貧弱かつ非合理なもので、先行したバビロニアの記数法のほうがはるかに合理的だった。ギリシャ人たちは何事においても論理的に考察することを好んだ。非合理的な記数法しか持たなかった彼らが、数を理論的に考察するためにとった方法は（定規とコンパスによる）作図だった。単位量を決めておけば、正の数量に関する限りは、それを線分の長さと見なすことによって、四則演算は作図で考察可能となり、すべての（正の）有理数は構成できる。ところが、正の有理数に限定しても、そこから構成される「長さ（数）」は有理数にとどまらない。しかも、そうして得られる長さは四則演算は可能であるから、彼らの数観念ではそれも数でなければならない。こうしてギリシャ人たちは数概念の変更ないし拡張を迫られたのである。この経緯を知ることなしに、ピタゴラス派の無理数発見時の驚愕は理解できない。

中学・高校数学で必要なのは、実数概念を数学的に捉えさせることではなく、実数＝線分の長さ、すなわち、数直線の思想であり、その感覚的把握である。それで十分である。

5．文字式の導入

「文字式」とは何か？ ここでは「文字式」とは整式（多項式）として述べる。

例として $f(x) = ax^2 + bx + c$ をあげて述べれば、通常、下記のような立場で指導される．

(1) a、b、c は「定数」、x は「変数」と考える。

(2) 定数にせよ、変数にせよ、いずれも「数」を表わし、それゆえに、和 $+$ や積 $\times$ が意味を持ち、数に関する演算法則が文字式にも成立する。

「定数」とか「変数」の意味は必ずしも明らかではない（次節参照）。特に定数を文字で表わす必然性は容易に理解されない。しかし、重要なのは、文字式を導入することのメリットを、中学校および高校数学全体を通じて認識させることである。負の数もそうであるが、文字式の効用は、導入時にすぐさま生徒には理解されない。

6．多項式, 多項式関数, グラフ

数学的には、写像概念は始域（定義域）X、終域 Y、対応規則 f の３点セットである。これを $f : X \to Y$ と表わす。ここで、終域は必ずしも値域とは一致しない。いわゆる「単射」、「全射」、「全単射」等の概念はこの設定でこそ意味を持つ。また、多項式 $f(x)$ そのものと、その多項式で定義された多項式関数 $f(x)$ は、たとえ、後者が始域と終域が決められているとしても、数学的には区別されるべきものである。

例として $f(x) = ax^2 + bx + c$ を考える。ここでは、a、b、c を実数としよう。これを多項式として見

るとは、$\mathbb{Z}^+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ から $\mathbb{R}$ への写像で、

$$0 \mapsto c\,,\ 1 \mapsto b\,,\ 2 \mapsto a$$

それ以外の整数 n については, $n \mapsto 0$

なるものを考えていることに他ならない。このことを一般的に定式化しておこう。$\varphi\ :\ \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$ なる写像を形式的巾級数という。形式的巾級数 φ に対して $a_n = \varphi(n)$ とおき、φ と数列 $\{a_n\}$ とを同一視しておく。

数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の和と積を

$$\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\} \quad ; \quad \{a_n\}\cdot\{b_n\} = \{\sum_{i+j=n} a_i b_j\}$$

と定義する。このとき、$\{a_n\}$ 全体は可換環をなす。これを $\mathbb{R}$ 上の形式的巾級数環といい、$\mathbb{R}[[X]]$ で表わす。$\varphi\,,\,\psi \in \mathbb{R}[[X]]$ を形式的に, それぞれ $\sum_{n\geqq 0} a_n X^n$, $\sum_{n\geqq 0} b_n X^n$ と表わせば, その和と積は

$$\varphi + \psi \leftrightarrow \sum_{n\geqq 0}(a_n + b_n)X^n$$

$$\varphi \cdot \psi \leftrightarrow \sum_{n\geqq 0}\Big(\sum_{i+j=n} a_i \cdot b_j\Big)X^n$$

と定義したことになる。こうしてみれば、X^n は a_n の n を示すための識別記号であるに過ぎず、また、$\cdots + a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots$ と書く際の $+$ も和とは関係のない記号に過ぎないことが明瞭になる。多項式とは形式的巾級数 $\sum_{n\geqq 0} a_n X^n$ で、その係数 a_n のうち $\neq 0$ となるものが高々有限個のものをいう。多項式全体の集合を $\mathbb{R}[X]$ と表わせば, 明らかに $\mathbb{R}[[X]]$ の部分環をなす。さて、定義から、形式的巾級数 $\sum_{n\geqq 0} a_n X^n$、$\sum_{n\geqq 0} b_n X^n$ について、

$$\sum_{n\geqq 0} a_n X^n = \sum_{n\geqq 0} b_n X^n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = b_n \quad (\forall n \geqq 0)$$

であることは明らかである。(未定係数法！) 従って、特に、x と x^3 は多項式としては異なる。

しかし、x と x^3 を関数と見れば、異なるとは言えない。始域と終域が明示されていないからである。実際、ともに、$\{-1\ ,\ 0\ ,\ 1\} \to\ \mathbb{R}$ なる関数と見れば, x と x^3 は一致する。ところが、ともに、$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ なる関数と見れば、x と x^3 は異なる関数である。

中学・高校数学では、関数は特に明示していなければ、始域は可能な限り広くとることが暗黙の前提である。この前提の下で、多項式として $f(x) \neq g(x)$ ならば、すなわち、どこかの次数の係数が異なっていれば、関数としても $f(x) \neq g(x)$ となる。いわゆる未定係数法はこの別表現である。これを支えているのは、いわゆる代数学の基本定理であることは強調されてよい。(方程式 $x^3 - x = 0$ の解は -1、0、1 の 3 個だけである。)

グラフの前提は座標である。中学数学では平面座標しか扱わない。ここでは $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ なる関数のグラフ $G(f) = \{(x,y)\ ;\ y = f(x)\}$ にしか言及しないが、この設定では関数の変化状況を視覚的に捉えること、すなわち、関数の視覚化の方向が問題となっている。しかし、高校数学まで見据えると、楕円、双曲線、放物線等を含む平面上の図形の代数化の方向も考える必要がある。そのためには、2変数の実数値関数 $f(x,y)$ のグラフを $G(f) = \{(x,y)\ ;\ f(x,y) = 0\}$ として捉えるのが望ましくもなる。このようなグラフは必ずしも一変数関数のグラフではない。

7．大学の立場からの中高数学への切り口１～数論的話題～

7.1　最大公約数の周辺

この小節では次のことを示そう。

a と b を互いに素な自然数で $a > b > 1$ とするとき、自然数 n は $n \geq (a-1)(b-1)$ ならば、適当な整数 $x \geqq 0$ と $y \geqq 0$（ただし, $x + y > 0$）について $n = ax + by$ の形に表わされ、$(a-1)(b-1) - 1$ はこの形に表わされない。

まず、次のことを予備知識として仮定する。

(1) 整数 a と b が互いに素 $\Longleftrightarrow$ $ax + by = 1$

(2) 自然数 a を b で割ったとき、余りが r となったとき、$a \equiv r \mod b$ と表わし、a は b を法として r と合同であるという。

この問題の導入として次の練習問題を考える。

(1) 6円切手と8円切手を使って表わし得ない自然数値は無限個ある。

(2) 5円切手と8円切手を使って表わし得ない自然数値は有限個である。

(3) 8円切手と11円切手を使って表わし得ない自然数値は有限個である。

この問題の略解を記しておく。

(1).　$x\ ,\ y \in \mathbb{Z}$ について、$6x + 8y$ は偶数である。

(2). 5 を法として、

$8 \equiv 3$; $8{\times}2 = 16 \equiv 1$; $8{\times}3 = 24 \equiv 4$; $8{\times}4 = 32 \equiv 2$

よって 27 は $8x + 5y$ の形に表わされない。また、$28 = 4 \times 5 + 1 \times 8$、$29 = 1 \times 5 + 3 \times 8$、$30 = 6 \times 5$、$31 = 3 \times 5 + 2 \times 8$ だから、$m \geq 28$ なる自然数値 m はすべて $8x + 5y$ の形に表わされる。

(3). (2) と同様にして、$m \geq 70$ なる自然数値 m はすべて $8x + 11y$ の形に表わされることがわかる。

以上の例から、定理として掲げたことが成立することが予想される。

また、その際、問題の焦点は a の $\mathbb{Z}/(b)$ における像 $\overline{a}$ が巡回群 $G = (\mathbb{Z}/(b) \ : \ +)$ の生成元となること、および、Gが次の集合と一致することにある。

$$\{\overline{(b-1)(a-1)}\ ,\ \overline{(b-1)(a-1)+1}\ ,\cdots,\ \overline{(b-1)a}\}$$

$(b-2)a < (b-1)(a-1)$ に注意すれば、冒頭の主張の証明が完了する。(この証明を正当に理解するためには少しばかり群論的考察が必要である。)

7.2 最大公約数の周辺

次の問題を提出する。ただし、解は記さない。

a 、b を互いに素な自然数とする。このとき次が成り立つ。

(1) $ax + by = 1$; $0 < x < b$; $-a < y < 0$ をみたす整数 x、y は一意的に存在する。

(2) $au + bv = 1$ をみたす整数 u 、v は (1) の整数 x、y に対して、

$$\exists z \in \mathbb{Z} \quad \text{s.t.} \quad u = x + bz \ , \ v = y - az$$

と表わされる。

(3) $\exists z \in \mathbb{Z}$ について、$u = x + bz$ 、$v = y - az$ と表わされる整数 u 、v は $au + bv = 1$ をみたす。

この問題を通して訴えたのは、下記のことである。

(A) 与えられた問題に解はあるか？
(B) その問題に 標準的な解 があるか？
(C) 標準的な解は一般的解を支配するか？ また、支配するとしたら、どのような形で支配するか？ (標準解の意味！)

8. 大学の立場からの中高数学への切り口 2〜図形的話題〜

図形的話題としては下記のものが適当である。

(1) 直円錐の平面による切り口；アポロニウスの方法と、2次曲線の標準形を前提としたベクトルによる方法。(円柱の平面による切り口も後者の方法で扱える)
(2) 三平方の定理では、バビロニアの証明とユークリッドの証明を対比させる。
(3) 円周角の定理では、複素平面を用いる方法を紹介する。これによれば、場合分けの煩雑さが解消され、また、角の概念が明快になる。

ここでは、(1) のベクトルによる解法だけを略述しておく。

xyz 空間の原点を $\mathbf{O}\,(0,0,0)$ とし、定点 $\mathbf{A}$ の座標を $(0, \cos\alpha, r\,\sin\alpha)$ とする。$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$ を軸とする直円錐のベクトル方程式は、その円錐面の任意の点を $\mathbf{P}(x,y,z)$ とするとき、

$$(\overrightarrow{\mathbf{AO}}, \overrightarrow{\mathbf{AP}}) = |\mathbf{AO}|{\cdot}|\mathbf{AP}|\cos\theta \qquad \left(\theta = \angle(\overrightarrow{\mathbf{AO}}, \overrightarrow{\mathbf{AP}})\right)$$

で与えられる。ここで、左辺の内積を成分表示し、$z = 0$ とおけば、直円錐の xy 平面による切り口の面の方程式が得られる。それは θ と α の大小関係で楕円, 放物線, 双曲線 (および互いに交わる 2 直線〜退化 2 次曲線〜) のいずれかであることが決まる。

補足しておくと、この解法は 2 次曲線の標準形の知識を前提としている。また、現行の高校数学の指導要領では、空間ベクトルの扱いが著しく制限され、このようなベクトル方程式の使用は高校数学の範囲では認められていない。

上述の話題を通して訴えたいのは、下記のことである。

(a) 初等幾何的方法、ベクトル的取り扱い、座標幾何的取り扱い等の違い、それぞれの特徴。
(b) 座標はアプリオリなものではなく便宜的なものである。それゆえ、座標変換に関わらず不変な性質を捉えるべきである。換言すれば，興味を図形から変換群に移行させることである。

9. 中高の幾何学の流れ

本節では中学数学および高校数学に現れる図形教材を概観する。

9.1　初等幾何学の構図

1. 基本的な素材：点、直線（線分）、三角形、円
高校では、楕円、双曲線、放物線が基本素材として加わる。
2. 基本的な量：長さ、角（ただし、角の概念は難しい　(2 項 (3) および１０節参照)）
3. 基本的な関係概念：(円や直線等の）交点（接点を含む)、(直線の）平行、垂直
4. 基本的な操作概念：合同変換，相似変換。(合同変換は線分の長さを保つ変換、相似変換は角の大きさを保つ変換と特徴づけられる。)

9.2　中高幾何学の基本定理

1. 三角形の合同・相似条件；ただし、合同変換や相似変換の定義は直観的であり、精密ではない。
2. 三角形の５心の存在。(重心や垂心についてはベクトル的扱いが有用。)
3. 円周角の定理（中学第２学年）(方巾の定理、特に、線分の長さ a に対する $\sqrt{a}$ の作図可能性はこの定理の応用)
4. 三平方の定理（中学第３学年）
5. 余弦定理と正弦定理（高校)。三角形の合同条件は三角形の６要素すべてを決定する。これにより合同や相似は中学では定性的であるが、高校では定量的になる。

9.3　図形教材取り扱いの留意点

1. 前提となる方法論：平行線の作図、(単位量が与えられたときの）長さの四則演算、長さの平方根、等の基本的な作図法
2. 面積代数に触れ、正の量に関する限りは、下記の展開公式は長方形の面積で捉えられる。

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

特に，三平方の定理は、長さの積を面積と捉えて証明されることを認識させる。
3. 円周角の定理を初等幾何学的に証明する際は，場合分けの必要性を認識させるとともに、場合分けの完全性に注意を払わせる。実際，円 O の円周上に A, B, P をとるとき、まず、次の２つに分ける必要がある。
(3-1) P と O が弦 AB に関して同じ側にある場合。
(3-2) P と O が弦 AB に関して反対側にある場合。
(3-1) の場合は、さらに次の３つの場合に分ける必要がある。
(i) $O \in AB$　(ii) $\in \Delta APB$　(iii) $O \notin \Delta APB$
4. 三角形の５心の存在については、それぞれについて、初等幾何的方法、ベクトル的取り扱い、座標幾何的取り扱いのいずれが適当であるか、考えさせること。

10. その他の話題

以上のほか、下記の話題も証明はともかく、中高の数学を理解する上では、言及する価値はある。

1. 数概念拡張の原動力とギリシャ３大作図問題（数学史的話題として）
2. 線分の長さは定規とコンパスにより n 等分できるが、角については３等分すらそれができない。(長さと角は異種の量である！)
3. Euler の多面体定理を直観的に説明し、その上で、正多面体の分類定理（中学第１学年）を解説する。

なお、数列あるいは関数の極限に関わる話題（主として高校数学の微分積分に関係する部分）は続編で述べる予定である。

11. あとがき

歴史的に見ると、数学の発展は“連続的に”ではなく、“断続的に”見えるところがある。発展が不連続になるのは、数学が取り込むべき世界を拡大する必要が生じ、その結果、数学の概念に何らかの大きな拡張あるいは変更があったからである。数学の場合、それは拡大であって、それ以前の数学の否定ではない。それ以前の数学は限定された状況下では正しい。拡大・一般化された数学から見れば、それ以前の数学は不十分で未完成である。

注意すべきは、拡大・一般化された数学を理解するためには、取り込むべき世界の必要性ないし必然性を理解することが前提であることである。数学教育にあっては、取り込むべき世界を児童・生徒に“自然に”提示できる状況になっていない時点では、むやみ

に一般化するのは正しくない。しかし、数学教師は二段階ほど先の数学の状況を眺望できなければならない。教員養成学部の数学のカリキュラムでは、二段階ほど先の数学の状況は「数学の教科専門科目」で講義されることになる。「教科教育法」はその題材はあくまでも中学校・高等学校の数学からとるべきで、それを支えるのが「教科専門科目」にあることを強くサジェストする役割を担っている。

中学校・高等学校の数学に含まれる教材のうち、「数と式」領域に関わる代数部門と「図形」領域に関わる初等幾何学を大きく支える数学は、複素数体と複素平面であると著者は考える。その概要は、参考文献に掲げた連作「複素数の世界」で論及した。

参考文献

[1] 佐藤英雄, 複素数の世界 (1), 教育実践総合センター紀要 (2004),147-152.

[2] 佐藤英雄, 複素数の世界 (2), 和歌山大学教育学部紀要 (2006),51-57.